

Шәкір Айдос 

Әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті, Алматы, Қазақстан

e-mail: ajdossakir@gmail.com

9-дәріс. Анықталмаған интеграл. Алғашқы функция. Интегралдау амалы.

Дәрістің мақсаты – интегралдау амалының көмегімен функцияның алғашқы функциясын табу және оның қасиеттерін үйрену

Негізгі сұрақтар:

1. Анықталмаған интеграл және оның қасиеттері.
2. Алғашқы функция. Функцияны интегралдау амалы.

1 Алғашқы функция және анықталмаған интеграл

Дифференциалдық есептеуде берілген функция бойынша оның туындысын табу есебі қойылады. Математикалық талдаудың көптеген қолданылуларында — геометрияда, физикада, механикада жиі кездесетін есептерде — берілген туындысы бойынша функцияның өзін анықтау қажет, яғни интегралдау дифференциалдауға кері амал.

Анықтама 1.1. Егер $f(x)$ және $F(x)$ функциялары (a, b) интервалында анықталған, кез келген $x \in (a, b)$ нүктесінде $F(x)$ дифференциалданып,

$$F'(x) = f(x) \quad (1.1)$$

теңдігі орындалса, онда $F(x)$ функциясын $f(x)$ функциясының (a, b) интервалындағы **алғашқы (бастапқы) функциясы** деп атайды.

Ескерту. Кесіндіде, жартылай аралықта және шексіз аралықта $f(x)$ функциясының алғашқы функциясы жоғарыдағыдай анықталады.

Мысалдар

1. $F(x) = \cos x$ функциясы $(-\infty, +\infty)$ аралығындағы $f(x) = -\sin x$ функциясының алғашқы функциясы, себебі:

$$F'(x) = (\cos x)' = -\sin x = f(x).$$

Сонымен бірге $F(x) = \cos x \pm 5$ та алғашқы функциялар.

2. $F(x) = x^3$ функциясы $(-\infty, +\infty)$ аралығында $f(x) = 3x^2$ функциясының алғашқы функциясы:

$$F'(x) = (x^3)' = 3x^2 = f(x).$$

3. $F(x) = \arcsin x$ функциясы $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $x \in (-1, 1)$ үшін алғашқы функция:

$$F'(x) = (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = f(x).$$

Жоғарыдағы мысалдардан алғашқы функцияның бірімәнді анықталмайтыны көрінеді. Егер $F(x)$ функциясы (a, b) интервалында $f(x)$ функциясының алғашқы функциясы болса, онда $F(x) + C$, мұнда C кез келген тұрақты сан, да алғашқы функция болады.

Теорема 1.1. Егер $F_1(x)$ және $F_2(x)$ функциялары (a, b) интервалында $f(x)$ функциясының кез келген алғашқы функциялары болса, онда $\forall x \in (a, b)$ үшін

$$F_1(x) - F_2(x) = C,$$

мұнда C — тұрақты сан.

Доказательство. $\Phi(x) = F_1(x) - F_2(x)$ деп алайық. $F_1(x)$ және $F_2(x)$ функциялары дифференциалданып отырғандықтан, $\Phi(x)$ те дифференциалданады және:

$$\Phi'(x) = F_1'(x) - F_2'(x) = f(x) - f(x) = 0.$$

Демек, $\Phi(x)$ тұрақты функция, яғни $F_1(x) - F_2(x) = C$. □

Анықтама 1.2. (a, b) интервалында берілген $f(x)$ функциясының барлық алғашқы функциялар жиынтығын $f(x)$ функциясының **анықталмаған интегралы** деп атайды, оны

$$\int f(x) dx = F(x) + C$$

түрінде белгілейді, мұнда C — еркін тұрақты.

Жоғарыдағы мысалдарға оралсақ:

$$\int \sin x \, dx = -\cos x + C.$$

$$\int 3x^2 \, dx = x^3 + C.$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C.$$

Анықталмаған интеграл анықтамасы және оның қасиеттері

Анықталмаған интеграл анықтамасынан төмендегі қасиеттер шығады.

1. Анықталмаған интегралдың туындысы интеграл астындағы функцияға тең:

$$\left(\int f(x) \, dx \right)' = f(x).$$

Шынында,

$$\left(\int f(x) \, dx \right)' = (F(x) + C)' = F'(x) = f(x).$$

2. Анықталмаған интегралдан алынған дифференциал интеграл астындағы өрнекке тең:

$$d \left(\int f(x) \, dx \right) = f(x) \, dx.$$

Шынында,

$$d \left(\int f(x) \, dx \right) = d(F(x) + C) = dF(x) = f(x) \, dx.$$

Демек, егер дифференциал белгісі интеграл белгісінің алдында тұрса, олар өзара қысқарады.

3. Дифференциалдан алынған анықталмаған интеграл:

$$\int dF(x) = F(x) + C.$$

Шынында,

$$\int dF(x) = \int F'(x) \, dx = F(x) + C.$$

6.2 Анықталмаған интегралдың негізгі қасиеттері

Теорема 6.2.1. Тұрақты санды анықталмаған интеграл алдына шығаруға болады:

$$\int k f(x) dx = k \int f(x) dx, \quad k = \text{const.}$$

Дәлелдеу.

$$\left(\int k f(x) dx \right)' = k f(x), \quad \left(k \int f(x) dx \right)' = k f(x).$$

Теорема дәлелденді.

Теорема 6.2.2. Алгебралық қосындының анықталмаған интегралы анықталмаған интегралдардың алгебралық қосындысына тең:

$$\int [f(x) \pm g(x)] dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx.$$

Дәлелдеу. Егер $F'(x) = f(x)$ және $G'(x) = g(x)$, онда

$$[F(x) \pm G(x)]' = F'(x) \pm G'(x) = f(x) \pm g(x).$$

Теорема дәлелденді.

6.3 Анықталмаған интегралдар кестесі

Әрбір дифференциалдау формуласына сәйкес интегралдау формуласы бар:

$$\int f(x) dx = F(x) + C.$$

- I $\int 0 dx = C.$
- II $\int 1 dx = x + C.$
- III $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \quad \alpha \neq -1.$
- IV $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C.$
- V $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, \quad a > 0, a \neq 1.$
- VI $\int e^x dx = e^x + C.$
- VII $\int \sin x dx = -\cos x + C.$
- VIII $\int \cos x dx = \sin x + C.$
- IX $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + C.$
- X $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x + C.$
- XI $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C.$
- XII $\int \tan x dx = -\ln|\cos x| + C.$
- XIII $\int \cot x dx = \ln|\sin x| + C.$
- XIV $\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + C.$
- XV $\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a+x}{a-x} \right| + C.$
- XVI $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C.$
- XVII $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C.$
- XVIII $\int \sinh x dx = \cosh x + C.$
- XIX $\int \cosh x dx = \sinh x + C.$
- XX $\int \frac{dx}{\cosh^2 x} = \tanh x + C.$
- XXI $\int \frac{dx}{\sinh^2 x} = -\coth x + C.$
- XXII $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm a} \right| + C.$

6.4 Анықталмаған интегралды интегралдау әдістері

Айнымалыны алмастыру әдісі

Теорема 6.4.1. $t = \varphi(x)$ қатаң монотонды және дифференциалданатын функция болсын. Егер

$$\int g(t) dt = G(t) + C,$$

онда

$$\int g[\varphi(x)] \varphi'(x) dx = G[\varphi(x)] + C.$$

Бұл ереже күрделі функцияны дифференциалдау формуласынан шығады:

$$\frac{d}{dx} G(\varphi(x)) = G'(\varphi(x)) \varphi'(x) = g(\varphi(x)) \varphi'(x).$$

Айнымалыны алмастыру әдісінің мәні:

$$\int f(x) dx$$

түріндегі интегралда $t = \varphi(x)$ алмастыру енгізіп,

$$f(x) dx = g(t) dt$$

түріне келтіру.

Сонда интеграл:

$$\int f(x) dx = G(\varphi(x)) + C.$$

Айнымалыны алмастыру интегралдаудың ең тиімді әдістерінің бірі.

Бөліктеп интегралдау әдісі

Теорема 6.4.2. Егер $u(x)$ және $\vartheta(x)$ функциялары X аралығында анықталған дифференциалданатын функциялар және осы аралықта $\vartheta(x)u'(x)$ функциясының алғашқы функциясы бар болса, онда осы аралықта $u(x)\vartheta'(x)$ функциясының да алғашқы функциясы бар және

$$\int u(x)\vartheta'(x) dx = u(x)\vartheta(x) - \int \vartheta(x)u'(x) dx, \quad (6.4.9)$$

немесе қысқа түрде

$$\int u d\vartheta = u\vartheta - \int \vartheta du. \quad (6.4.10)$$

Дәлелдеу. $u(x)\vartheta(x)$ көбейтіндісінің туындысы белгілі:

$$[u(x)\vartheta(x)]' = u'(x)\vartheta(x) + u(x)\vartheta'(x). \quad (6.4.11)$$

(6.4.11) теңдіктің екі жағын dx -ке көбейтеміз:

$$[u(x)\vartheta(x)]' dx = u'(x)\vartheta(x) dx + u(x)\vartheta'(x) dx.$$

Енді интегралдаймыз:

$$\int [u(x)\vartheta(x)]' dx = \int u'(x)\vartheta(x) dx + \int u(x)\vartheta'(x) dx.$$

Осыдан:

$$\int u(x)\vartheta'(x) dx = \int [u(x)\vartheta(x)]' dx - \int \vartheta(x)u'(x) dx.$$

Ал

$$\int [u(x)\vartheta(x)]' dx = u(x)\vartheta(x) + C,$$

сондықтан X аралығында барлық $x \in X$ үшін

$$\int u(x)\vartheta'(x) dx = u(x)\vartheta(x) - \int \vartheta(x)u'(x) dx.$$

(6.4.10) формула дәлелденді.

(6.4.10) формуладағы

$$\int u d\vartheta$$

түріндегі интегралды есептеу

$$\int \vartheta du$$

түріндегі интегралға келтірілді. Мұндағы соңғы интеграл не кестелік, не интегралдауы жеңіл болуы тиіс.

(6.4.10) формуланы **бөліктеп интегралдау формуласы** деп атайды.

2 Қосымша ақпарат

Студент толық ақпаратты [1], [2], [3], [4], [5], [6], [7], [8], [9], [10], [11], [12], [13], [14] жұмыстардан қарауға болады.

Список литературы

- [1] Ибрашев Х.И., Еркеғұлов Ш.Т. Математикалық анализ курсы. – Алматы: Экономика, 2014. – 1-том. – 562 б. 2
- [2] Жәутіков О.А. Математикалық анализ курсы. – Алматы: Экономика, 2014. – 832 б. 2
- [3] Темірғалиев Н.Т. Математикалық анализ. – Алматы: Мектеп, 1987. – 1-том. – 288 б. 2
- [4] Темірғалиев Н.Т. Математикалық анализ. – Алматы: Ана тілі, 1991. – 2-том. – 400 б. 2
- [5] Ильин В.А., Позняк Э.Г. Основы математического анализа. – М.: Наука-Физматлит, 1998. – Часть 1. – 616 с. 2
- [6] Ильин В.А., Позняк Э.Г. Основы математического анализа. – М.: Наука-Физматлит, 1998. – Часть 2. – 448 с. 2
- [7] Зорич В.А. Математический анализ. – М.: МЦНМО, 2012. – Т. 1. – 702 с. 2
- [8] Кудрявцев Л.Д. Математический анализ. – М.: Высшая школа, 1981. – Том 1. – 687 с. 2
- [9] Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. – М.: Физматлит, 2003. – Том 1. – 680 с. 2
- [10] Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. – М.: Физматлит, 2003. – Том 2. – 802 с. 2
- [11] Демидович Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1997. – 624 с. 2
- [12] Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа. – СПб.: Профессия, 2001. – 432 с. 2
- [13] Кудрявцев Л.Д. Краткий курс математического анализа. – М.: Физматлит, 2005. – Том 1. – 400 с. 2
- [14] Сатығулова С., Исакова А.Қ., Айтжанов С.Е. Математикалық анализ I. – Алматы: Қазақ университеті, 2020. – 236 б. 2